

# berekeningen\_calculs

Tekst\_Texte :  
Eric Ceuterick, Technical Consultant - Helpdesk Infosteel

Met dank aan Avec remerciements à :  
Geert Goossens (Buildsoft)  
Rudi Van Mechelen, Peter Van Tendeloo,  
Gino Vanstraelen (Nemetschek Scia)  
voor hun medewerking pour leur collaboration  
en voor de vertaling et pour la traduction : José Jongen

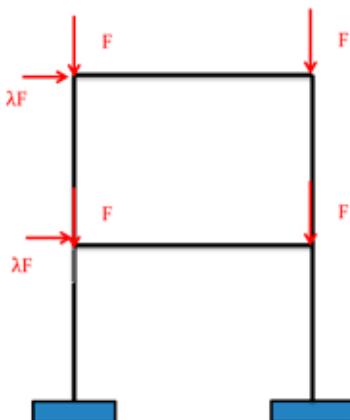
Geraadpleegde literatuur Bibliographie consultée :  
Stabiliteit voor de staalconstructeur (Staalcentrum Nederland)  
Krachtswerving (Bouwen met Staal)

84

## Berekenen van stalen raamwerken volgens de eerste-orde of de tweede-orde? Een leidraad

### Wat is een eerste- en tweede-orde berekening?

De eerste-orde berekening van een constructie is eigenlijk een synoniem voor de klassieke manier van werken voor een constructieve berekening op een onvervormde hartlijnenstructuur. Een tweede-orde berekening daarentegen houdt rekening met de verplaatsing van de aangrijpingspunten van de lasten, zoals dat in de figuur 1 is weergegeven.



Figuur 1: Eerste-orde en tweede-orde berekening, interactie verticale en horizontale lasten,  $\lambda$  geeft het aandeel van de zijdelingse last weer ten opzichte van de verticale last  $F$ .

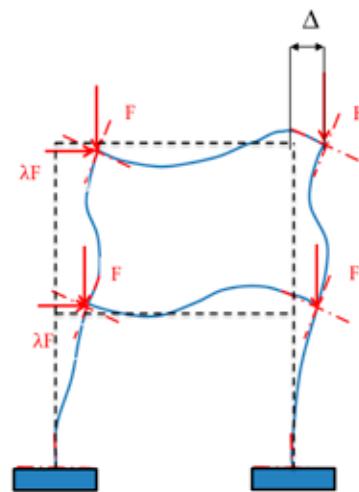
Figure 1 : La théorie du premier ordre et du deuxième ordre, l'interaction entre les charges verticales et horizontales,  $\lambda$  représente la proportion de la charge latérale par rapport à la charge verticale  $F$ .

In Hoofdstuk 5 van de EN 1993-1-1 worden het constructief model en de fundamentele aannamen van de berekening ervan besproken. De tweede alinea behandelt de stabiliteit van de constructie met betrekking tot de effecten van de vervormingen op de structuur. Deze vervormingen zijn enerzijds het gevolg van de lasten op de structuur, maar anderzijds ook van de vormfouten (binnen de toleranties) van de onderdelen en deze die ontstaan zijn tijdens de montage. De laatste twee worden in detail gedefinieerd en gecatalogeerd als de globale en lokale imperf ecties. De norm beperkt zich tot de voorschriften voor gebouwen en daarom worden al deze elementen gestroomlijnd en toepasbaar gemaakt voor de raamwerken. Dit is zeker niet nieuw, maar is na verschillende normversies systematisch verfijnd, door het voortschrijdende inzicht maar vooral door de steeds groter wordende mogelijkheden van de huidige software.

## Eléments de base relatifs aux calculs des charpentes selon les théories du premier et du deuxième ordre

### Qu'est-ce qu'un calcul selon la théorie du premier ordre et du deuxième ordre?

Le calcul d'une construction, selon la théorie du premier ordre, est de fait la méthode classique de calcul, sur base d'une structure axiale non déformée. Le calcul, selon la théorie du deuxième ordre tient, par contre compte du déplacement du point d'application des charges, comme illustré à la figure 1.



Le chapitre 5 de la norme EN 1993-1-1, définit le modèle constructif et les hypothèses fondamentales de calcul. Le deuxième alinéa traite de la stabilité de la construction, compte tenu des déformations de la structure. Ces déformations résultent, d'une part de la mise en charge de la structure mais, également des défauts de forme des éléments (dans les limites des tolérances admises) ainsi que des écarts générés lors du montage. Ces défauts de forme et ces déformations générées lors du montage, sont définis en détail et catalogué sous les vocables d'imperfections locales et globales. Tous les éléments de la norme relative aux prescriptions applicables aux bâtiments, sont rationalisés et rendus applicables aux charpentes. Ce principe de calcul déjà ancien a été régulièrement affiné lors des adaptations successives des normes et perfectionné, grâce aux progrès, sans cesse croissants des logiciels actuels.

In de norm dient een constructieve berekening voor raamwerken volgens de tweede-orde te gebeuren als aan de volgende criteria is voldaan:

$$\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{Ed}} < 10 \text{ voor een elastische berekening}$$

$$\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{Ed}} < 15 \text{ voor een plastische berekening}$$

Waarbij :

- $\alpha_{cr}$  de factor waarmee de rekenwaarde van de belastingen zou moeten verhoogd worden om een algemene elastische instabiliteit (knik) van de constructie te veroorzaken.
- $F_{cr}$  is de elastische kritieke knikbelasting voor de algemene instabiliteitsvorm die gebaseerd is op de initiële elastische stijfheden.
- $F_{Ed}$  is de rekenwaarde van de belasting (uit de belastingcombinatie) op een constructie

We kunnen deze criteria ook als volgt uitdrukken:

De rekenwaarde voor de normaalkracht in de kolom voor de lastcombinatie in de uiterste grenstoestand (UGT) dient groter te zijn dan 10% van de Eulerse kniklast voor de tweede-orde elastisch en 7% voor de tweede-orde plastische berekening.

### Toepassing bij portaalvormige raamwerken

Portaalvormige raamwerken met een geringe helling van de boven regel (helling  $< 1/2$  of  $27^\circ$ ) en uit vlakke raamwerken samengestelde kolommen en liggers in gebouwen mogen met een eerste-orde berekening getoetst worden voor het bezwijken met een knikvorm voor een zijdelings ongesteund raamwerk (sway) indien aan bovenvermeld criterium voldaan is voor elke verdieping. Voor deze constructies mag  $\alpha_{cr}$  berekend worden met de volgende benaderingsformule, op voorwaarde dat de axiale drukkracht in de liggers en de helling ervan gering is :

$$\alpha_{cr} = \left( \frac{H_{Ed}}{V_{Ed}} \right) \left( \frac{h}{\delta_{H,Ed}} \right)$$

Waarbij :

- $H_{Ed}$  de rekenwaarde van de horizontale reactie aan de voet van een verdieping door de horizontale belastingen en fictieve horizontale belastingen

La norme requiert un calcul, selon la théorie du deuxième ordre dans le cadre du respect des critères suivants :

$$\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{Ed}} < 10 \text{ pour un calcul élastique}$$

$$\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{Ed}} < 15 \text{ pour un calcul plastique}$$

Où :

- $\alpha_{cr}$  est le facteur par lequel la valeur de calcul des charges devrait être augmentée pour créer une instabilité élastique générale (flambage) de la construction.
- $F_{cr}$  est la charge de flambage critique élastique pour la forme d'instabilité générale qui est basée sur les rigidités élastiques initiales.
- $F_{Ed}$  est la valeur de calcul de la charge (tirée de la combinaison des charges) sur une construction.

Ces critères peuvent être exprimés de la manière suivante :

L'effort normal, à prendre en compte pour le calcul de la colonne et pour une combinaison de charges, dans la condition limite extrême (ELU), doit être supérieur à 10% de la charge de flambage d'Euler, dans le cadre du calcul élastique du deuxième ordre et de 7% pour le calcul plastique du deuxième ordre.

### Application pour des charpentes en forme de portique

Les charpentes en forme de portique, constituées d'éléments plans et présentant une pente maximum de  $27^\circ$  (pente  $< 1/2$ ) en ce qui concerne la traverse supérieure, peuvent être vérifiées à l'affaissement, par un calcul du premier ordre, dans le cas où elles ne sont pas soutenues latéralement (sway), si les critères ci-dessus sont respectés.

Dans ce cas,  $\alpha_{cr}$  peut être calculé par la formule suivante :

$$\alpha_{cr} = \left( \frac{H_{Ed}}{V_{Ed}} \right) \left( \frac{h}{\delta_{H,Ed}} \right)$$

Où :

- $H_{Ed}$  est la valeur de calcul de la réaction horizontale au pied d'un étage par les charges horizontales et les charges horizontales fictives

Figuur 2 Krachtswerking, eerste-orde en verplaatsing, tweede-orde per verdieping zoals ze in de norm per verdieping aangeduid worden

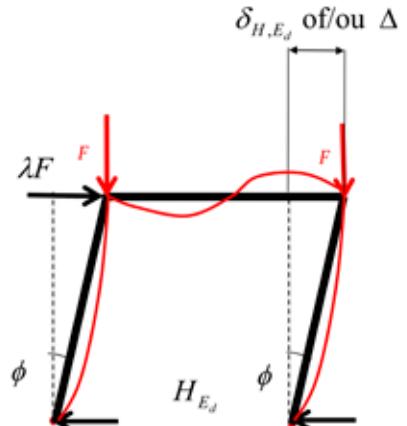
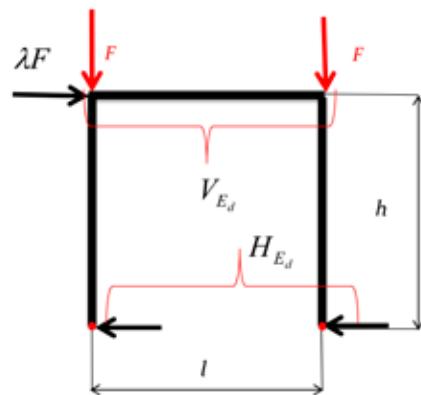
Figure 2 : Action des forces, premier ordre et déplacement deuxième ordre par étage, comme indiqué dans la norme par étage

- $V_{Ed}$  de rekenwaarde van de totale verticale belasting op een constructie aan de voet van een verdieping
- $\delta_{H,Ed}$  is de horizontale verplaatsing van de bovenkant van een verdieping ten opzichte van de basis van de verdieping, wanneer het raamwerk belast is met horizontale belastingen en fictieve horizontale belastingen die aangrijpen ter plaatse van elke verdieping
- $h$  is de verdiephoogte.

Deze grootheden zijn aangeduid op de raamwerken in de figuur 2

- $V_{Ed}$  est la valeur de calcul de la charge verticale totale sur une construction au pied d'un étage
- $\delta_{H,Ed}$  est le déplacement horizontal du dessus d'un étage par rapport à la base de l'étage, lorsque la charpente subit des charges horizontales et des charges horizontales fictives qui s'appliquent à l'endroit de chaque étage
- $h$  est la hauteur d'étage.

Ces grandeurs sont indiquées sur les charpentes de la figure 2.



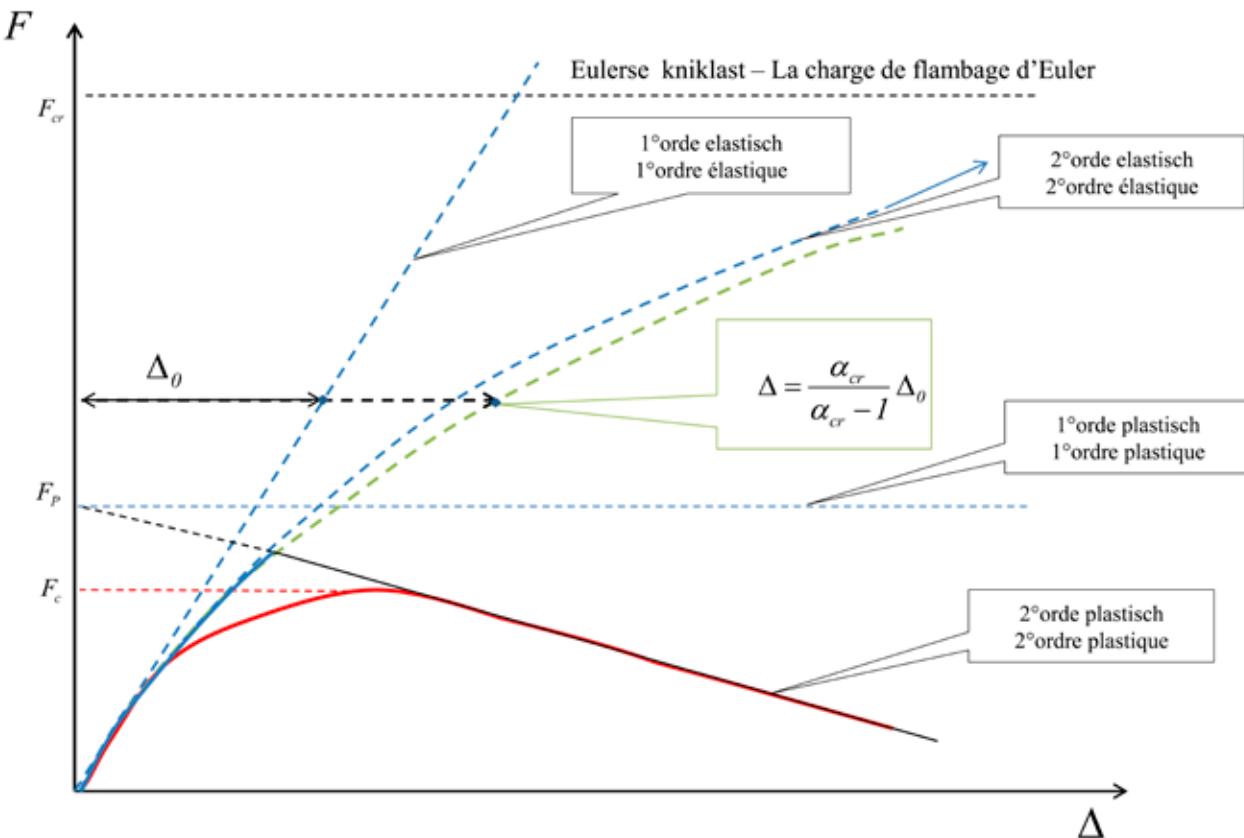
Een en ander wordt ook duidelijker aan de hand van een lastenverplaatsingsverloop, waarvoor  $\lambda$  als veranderlijke fungert (echter niet te verwarren met de belastingfactor). We stellen in de ordinat dus zowel de normaalkracht in de kolom als de zijdelingse last voor. (figuur 3)

In het diagram van figuur 3 geeft de curve eerste-orde (elastisch) een lineair verloop weer. Bij stijgende  $\lambda$  (in de ordinat) gaat de zijdelingse verplaatsing  $\Delta = \psi \cdot h$  aan de top van het raamwerk gewoon lineair toenemen. Wanneer de verplaatsingen (abcis) groter worden en met de verplaatsingen van de aangrijpingspunten van de lasten, die voor bouwconstructies meestal gewichtslasten zijn, rekening wordt gehouden, wordt overgegaan op een tweede-orde (elastisch) berekening.

L'ensemble devient plus évident, en adoptant  $\lambda$  comme variable principale (à ne pas confondre avec le facteur de charge). Nous proposons donc, dans le tableau suivant, de reprendre en ordonnée l'effort normal dans la colonne ainsi que la charge latérale. (figuer 3)

Sur le graphique de la figure 2, la courbe basée sur le premier ordre (élastique) est de forme linéaire. Dès lors, si  $\lambda$  en ordonnée augmente le déplacement latéral  $\Delta = \psi \cdot h$  en tête de portique va s'accroître de manière linéaire.

Dans le cas où les déplacements, en abscisse augmentent et tenant compte de charges ponctuelles, il y a nécessité d'avoir recours à un calcul (élastique) du deuxième ordre.



Een goede benadering voor de tweede-orde resultaten, die ook volgens de norm kan worden gebruikt tot  $\alpha_{cr} \geq 3$ , is de eerste-orde waarde te vermenigvuldigen met de vergrotingsfactor:

$$\alpha = \frac{\alpha_{cr}}{\alpha_{cr} - 1}$$

Het rechtsreeks berekende tweede-orde (elastisch) verloop is weergegeven in de figuur 3 en nadert asymptotisch de horizontale onderbroken lijn door  $F_{cr}$  (Eulerse kniklast). Het tweede-orde verloop is niet-lineair, omdat het de interactie tussen de eerste-orde verplaatsingen en de verplaatsingen van de lasten weergeeft. Rekenkundig is dit een iteratie, een opeenvolging van steeds beter benaderende oplossingen om tenslotte tot een evenwicht te convergeren. Het is te vergelijken met het  $P\Delta$  effect voor een alleenstaande kolom.

De eerste-orde plastisch is enkel een bezwikklast, te bepalen uit het evenwicht van het onvervormde raamwerk en ontstaat bij de vorming van twee plastische scharnieren aan de top van de kolommen in het raamwerk, deze bezwikkwaarde wordt aangegeven door  $F_p$  op het diagram uit de figuur 3.

Il est possible d'obtenir une bonne approximation, concernant les résultats du calcul selon le deuxième ordre et pour  $\alpha_{cr} \geq 3$  en multipliant le résultat obtenu dans la théorie du premier ordre par le facteur amplificateur:  $\alpha = \frac{\alpha_{cr}}{\alpha_{cr} - 1}$

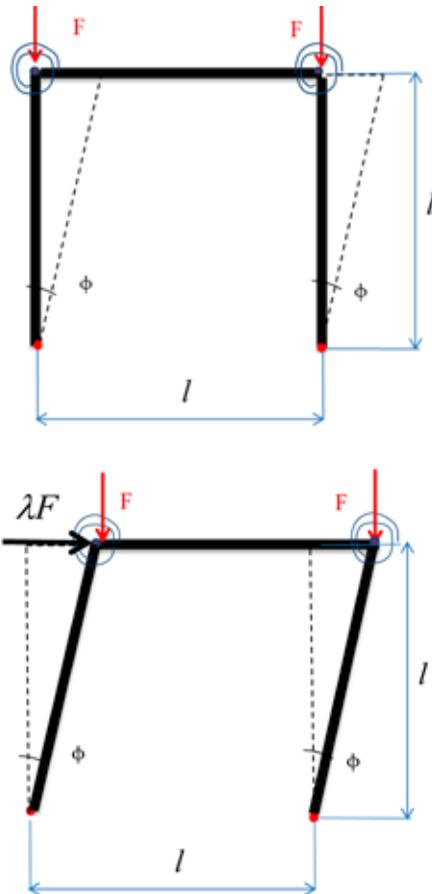
La courbe relative au calcul élastique du deuxième ordre, se rapproche de manière asymptotique de la ligne horizontale  $F_{cr}$  correspondant à la charge de flambage d'Euler. Cette courbe relative au deuxième ordre n'est en aucun cas linéaire car elle définit l'interaction entre les déplacements résultant du premier ordre et les déplacements des charges. Arithmétiquement, il s'agit d'une itération qui consiste en une succession de calcul de valeurs de plus en plus proches, convergeant en finalité à un équilibre. C'est comparable à l'effet  $P\Delta$  relatif à une colonne isolée.

Le premier ordre plastique se réfère à une charge d'affaissement, à déterminer à partir de l'équilibre de la charpente non déformée, déterminée lors de la l'apparition de deux rotules plastiques, à la partie supérieure des colonnes. Cette valeur est représentée par  $F_p$ , sur les diagrammes de la figure 3.

Figuur 3 Lasten/verplaatsingsverloop eerste-orde en

tweede-orde, elastisch en plastisch

Figure 3 Diagrammes charges/ déplacement de premier ordre et de deuxième ordre, élastique et plastique



Figuur 4 ontstaan plastische scharnier aan de top eerste-orde en kort opeenvolgend in de tweede-orde  
 \_Figure 4 Apparition d'une articulation plastique au premier ordre supérieur et peu après dans le deuxième ordre

Deze eerder voor de volledigheid geformuleerde eerste-orde (plastisch), wordt realistischer bij de tweede-orde, waarbij van in het begin met de verplaatsingen van de zijdelingse last rekening wordt gehouden, maar dan in het elastisch gebied en dus de curven voor tweede-orde elastisch en de tweede-orde plastisch over elkaar heen verlopen. Het is op het moment van het ontstaan van de eerste plastische scharnier dat er een verschil in de verlopen ontstaat. Op dezelfde plaatsen als bij de eerst-orde (plastisch) ontstaan nu twee opeenvolgende plastische scharnieren.

Bij een waarde voor de normaalkracht in de kolom gelijk aan  $F_c$ , die ook het maximum voorstelt in de curve voor het last/verplaatsingsverloop. Dat betekent dat bij een verdere verplaatsing een afnemende last gaat optreden, wat aangeeft dat we de overgang van stabiele naar een labiele evenwichtstoestand hebben gemaakt. Kortom dit is een instabiliteitsprobleem en wordt een bezwaar- of uiterste grenstoestand. De waarde voor  $F_c$  op de ordinaat ligt veel lager dan deze voor de kniklast  $F_{cr}$ .

### Besluit

Bovenstaande is een systeem om de effecten van de combinatie van verticale en horizontale lasten op een raamwerk zo correct mogelijk te berekenen. Hiervoor worden een aantal karakteristieke grootheden gedefinieerd, die de mijlpalen weergeven.

Het lasten/verplaatsingsverloop geeft de mogelijkheid om als leidraad te dienen en meer inzicht te geven in het proces.

Vooral bij de tweede-orde (plastisch) berekening kunnen verschillende niet-lineaire karakteristieken van de onderdelen in de berekeningen meegenomen worden. Bijvoorbeeld bij de verbindingen kan met het verloop van de stijfheid rekening worden gehouden. Ook het opeenvolgend ontstaan en verdwijnen van de inwendige plastische scharnieren kan goed opgevolgd worden, maar wordt bij meer complexe structuren vrij ingewikkeld. Uiteraard zal dit ook langere rekentijden geven.

Le premier ordre plastique, dont il est fait mention ci-dessus, dans le souci d'être complet, devient plus réaliste lorsque l'on applique le deuxième ordre, de par le fait que l'on prend en compte, dès le départ le déplacement de la charge latérale. Cela a pour conséquence un chevauchement des courbes relatives au deuxième ordre élastique et au premier ordre plastique. Ce n'est que lors de l'apparition de la première rotule plastique que les courbes s'écartent l'une de l'autre. Aux mêmes endroits que lors du premier ordre plastique, on assiste à l'apparition de deux rotules plastiques successives.

Le fait que pour la valeur  $F_c$  de l'effort normal, le diagramme charge/déplacement atteint son maximum, signifie que pour un nouveau déplacement, une charge réduite va être prise en compte et cela indique clairement que nous avons réalisé la transition de l'état d'équilibre stable vers un état d'équilibre instable. En résumé, ce problème d'instabilité constitue de fait, la situation limite de ruine ou situation limite extrême. Il faut noter, sur le diagramme de la figure 2 que la valeur  $F_c$  est notamment inférieure à la charge de flambage  $F_{cr}$ .

### Conclusion

Ce article définit un système de calcul, permettant de définir, de manière plus précise les effets résultant de la combinaison de charges verticales et horizontales sur une charpente. Dans ce but, plusieurs grandeurs caractéristiques sont définies, qui permettent de restituer les étapes principales.

Le diagramme charge/déplacement sert de fil conducteur à une meilleure compréhension du processus.

Dans le cadre de calcul du deuxième ordre plastique, diverses caractéristiques non linéaires des éléments peuvent être incorporées dans le calcul. Pour les assemblages, par exemple il y a possibilité de tenir compte d'une courbe de rigidité. De même, ce système permet un meilleur suivi des disparitions successives des rotules plastiques internes mais cela se complique notablement pour des structures plus complexes avec, pour conséquence, des durées de calcul plus longues.